

# FÍSICA GENERAL II:

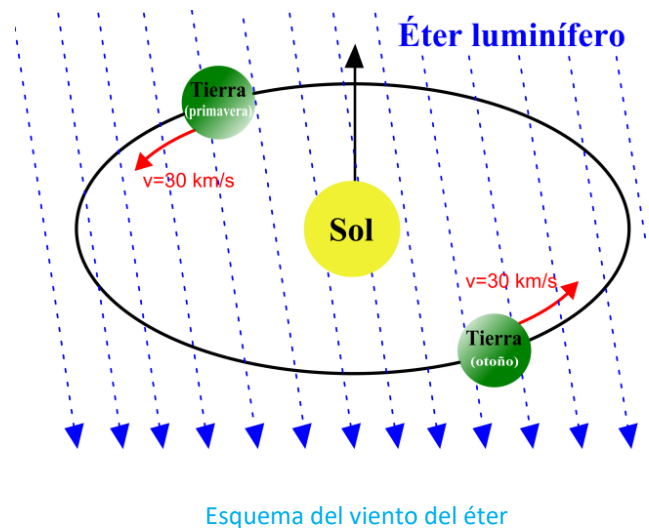
## APUNTES DE RELATIVIDAD ESPECIAL

### 1. Introducción

- **Experimento de Michelson-Morley (1887)**

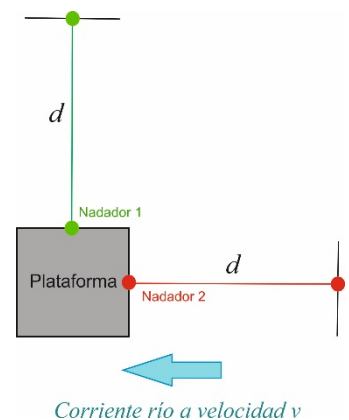
Se considera uno de los experimentos más importantes de la historia y la base de la relatividad especial. Hasta esa fecha se había medido con bastante precisión la velocidad de la luz en el vacío pero, al igual que las ondas mecánicas, se creía que ésta necesitaba un medio para propagarse: el éter (que ya los griegos consideraron el quinto elemento de la naturaleza).

Así, a finales del siglo XIX se postuló que todo el espacio estaba relleno del éter, un material de muy baja densidad, transparente y de muy alta elasticidad (ya que la velocidad de la luz es muy elevada) en el que se propagaba la luz debido a vibraciones en éste. El éter era considerado como un sistema de referencia en reposo absoluto con relación a todos los objetos del universo. Debido al movimiento de traslación de la tierra, a unos 30 km/s, ésta estaba sometida de forma distinta al llamado “*viento del éter*”, cuyo efecto sobre las ondas de luz, sería como el de la corriente de un río sobre un nadador que se mueve a favor o en contra de ella. En algunos momentos el nadador sería frenado, y en otros impulsado. Esto es lo que se creía que pasaría con la luz a viajar por la Tierra con diferentes posiciones con respecto al “viento del éter”.



#### Equivalencia de 2 nadadores en un río con corriente:

- 2 nadadores, que nadan a velocidad  $c$ , van a echar una carrera en un río por el cual fluye una corriente a velocidad  $v$ , y parten de la misma plataforma.
- El nadador 1 (*tvertical*) nadará en una trayectoria vertical hasta una marca situada a una distancia  $d$  y volverá a la plataforma.
- El nadador 2 (*thorizontal*) nadará en una trayectoria horizontal hasta una marca situada a una distancia  $d$  y volverá a la plataforma. Este nadador nadará en la dirección de la corriente (en un trayecto a favor de la corriente y en otro en contra).



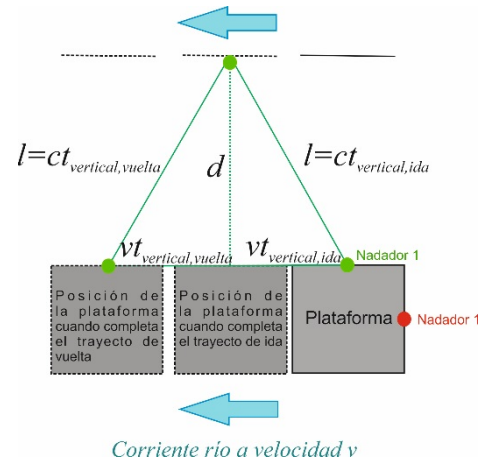
En los cálculos que siguen en vez de calcular la nueva velocidad del nadador al ser arrastrado por la corriente (y desplazarse entre las plataformas que están ancladas), vamos a considerar que la velocidad del nadador es constante y que la corriente lo que hace es mover las plataformas.

**a) Tiempo del nadador 1 (trayectoria vertical)**

Calculemos el tiempo del nadador 1, sumando el tiempo del trayecto de ida y vuelta, esto es  $t_{vertical} = t_{vertical,ida} + t_{vertical,vuelta}$ . Debido al movimiento de la marca y la plataforma producido por la corriente en el río, el nadador 1 describirá una trayectoria oblicua, recorriendo una distancia dada por  $2l$ , en donde se cumple:

$$l = ct_{vertical,ida}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{por Pitágoras: } l = \sqrt{d^2 + (vt_{vertical,ida})^2} \\ \Rightarrow t_{vertical,ida} = \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



Puesto que el trayecto de ida es igual que el de vuelta, el tiempo total del nadador 1 es el

doble del tiempo obtenido anteriormente:  $t_{vertical} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

**b) Tiempo del nadador 2 (trayectoria horizontal)**

Calculemos ahora el tiempo del nadador que nada a favor y en contra de la corriente. En el trayecto de ida la distancia que recorre es menor que  $d$  puesto que la corriente acerca hacia él el punto de destino, cumpliéndose:

$$d - vt_{horizontal,ida} = ct_{horizontal,ida} \Rightarrow t_{horizontal,ida} = \frac{d}{c + v}$$

En el trayecto de vuelta, la distancia a recorrer es mayor que  $d$ , puesto que la plataforma se aleja de él, de modo que:

$$d + vt_{horizontal,vuelta} = ct_{horizontal,vuelta} \Rightarrow t_{horizontal,vuelta} = \frac{d}{c - v}$$

Sumando los tiempos de ambos trayectos, tenemos que el tiempo total del nadador 2:

$$t_{horizontal} = \frac{d}{c + v} + \frac{d}{c - v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2}$$

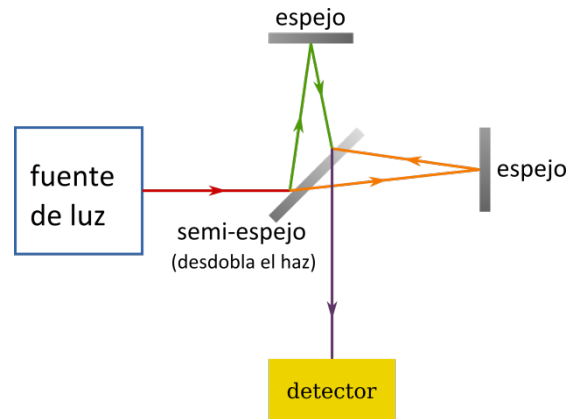
Si sustituimos  $d$  en una de las expresiones podemos obtener la siguiente expresión que relaciona los tiempos empleados por los nadadores:

$$t_{horizontal} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t_{vertical}$$

De forma que el nadador que nada en el sentido de la corriente (horizontalmente, en este caso), siempre llegará más tarde que el otro.

En un intento de probar la existencia del éter y la velocidad de la traslación de la Tierra con respecto a éste Albert Abraham Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) diseñaron un experimento capaz de medir la velocidad de la luz en dos direcciones perpendiculares entre sí y con diferente velocidad lineal relativa al éter. Fue el famoso [experimento de Michelson y Morley](#) (1887).

El resultado del experimento fue fallido: no había diferencia de velocidad de la luz en las dos trayectorias lo que equivalía a rechazar la existencia del “viento del éter” y posteriormente a argumentar que la velocidad de la luz era la misma independientemente del movimiento relativo de la fuente.



Experimento de Michelson-Morley

### • **Teoría especial de la relatividad (1905)**

El estudio de la Física moderna comienza con la [teoría especial de la relatividad o teoría restringida de la relatividad](#)<sup>1</sup> (publicada por Albert Einstein en 1905). Surgió al replantear la esencia del espacio y del tiempo. Las ideas que condujeron a la introducción de nuevas conclusiones son tan profundas, que muchas fueron consideradas de revolucionarias.

- El tiempo es relativo y fluye en forma distinta en sistemas que están en movimiento relativo.
- La longitud de un objeto no es absoluta, depende de su movimiento relativo con respecto a cada observador particular.
- La velocidad de la luz es invariante y, además, es el límite superior de todas las velocidades del Universo.
- Las interacciones gravitacional y electromagnética se propagan a velocidad  $c$ , y no con velocidad infinita.
- La mayoría de las ecuaciones de la dinámica clásica solo son aproximaciones.
- La masa y la energía son equivalentes en una forma nunca antes imaginada.

Estas ideas y otras más son *consecuencia de solo dos postulados sencillos* que introdujo Einstein, y que después desarrolló en forma elegante...

<sup>1</sup> Llamada teoría restringida porque solamente es válida para sistemas de referencia inerciales, lo que implica que no están sometidos a aceleración, por lo que no se considera la gravitación (eso se hace en la Teoría General de la Relatividad)

## 2. Postulados de la Relatividad Especial

### 2.1 Primer postulado de Einstein

*También llamado el principio de relatividad: “Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales<sup>2</sup>”*

Si las leyes difirieran, esta diferencia permitiría distinguir un marco inercial de los otros o haría que un marco fuera de algún modo más “correcto” que otro.

Por ejemplo: Si estoy viajando en un tren que se mueve a velocidad constante. No existe ningún experimento que pueda realizar a bordo del tren (lanzar una pelota al aire y estudiar su movimiento, o algo así) que me permita determinar la velocidad a la que se está moviendo el tren (si es que se mueve). Según el primer postulado, obtendremos el mismo resultado de este experimento en cualquier sistema de referencia inercial, por lo que, no podré distinguir uno de otro, o lo que es lo mismo, no podré calcular la velocidad.

*Corolario: es imposible, recurriendo a experimentos dentro de sistemas de referencia inerciales, distinguir cualquier de ellos de cualquier otro → ningún experimento puede determinar si cierto sistema inercial se mueve uniformemente o está en “reposo absoluto”.*

### 2.2 Segundo postulado de Einstein

*“La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales y es independiente del movimiento de la fuente”*

Demostrado en el experimento de Michelson-Morley (1887) en el que se trató de medir la velocidad de la luz con respecto al éter en distintas direcciones.

*Corolario 1: todo observador en un sistema de referencia inercial, medirá el mismo valor  $c=3 \cdot 10^8$  m/s, para la velocidad de la luz, independientemente del movimiento de la fuente.*

*Corolario 2: es imposible que un observador inercial viaje a  $c$ , la velocidad de la luz en el vacío.*

Si viajo en una nave espacial a velocidad  $c$  respecto a un observador terrestre y enciendo un faro, por el segundo postulado:

- Para el observador terrestre: la luz del faro se desplaza a  $c$ , por lo que, para éste tanto la nave espacial (que se desplaza a  $c$ ) como la luz del faro se desplazan juntos, y *siempre están en el mismo punto del espacio.*

---

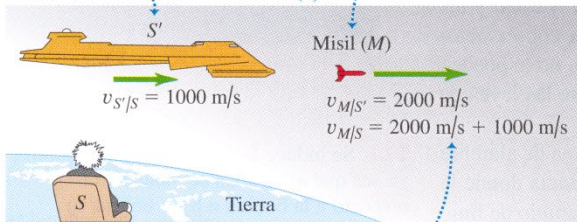
<sup>2</sup> Sistema de referencia inercial: aquel se mueve a velocidad constante.

- Para el observador de la nave: la luz del faro también se desplaza a  $c$  con respecto a la nave espacial, *por lo que no pueden hallarse en el mismo punto del espacio*.

Esta contradicción se resuelve argumentando que no puedo viajar a velocidad  $c$ .

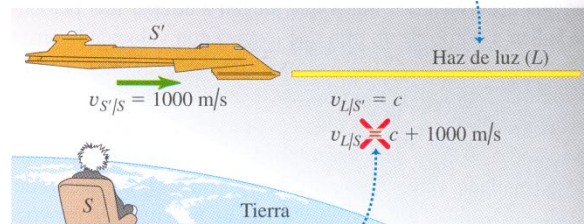
**37.2** a) La mecánica newtoniana predice correctamente acerca de objetos que se mueven relativamente lento; b) y predice incorrectamente el comportamiento del haz luminoso.

- a) Una nave espacial ( $S'$ ) se desplaza con una rapidez  $v_{S'/S} = 1000$  m/s relativa a un observador situado en la Tierra ( $S$ ). Se dispara un misil ( $M$ ) con una rapidez  $v_{M/S'} = 2000$  m/s con respecto a la nave espacial.



**LA MECÁNICA NEWTONIANA** nos dice correctamente que el misil se desplaza con una rapidez  $v_{M/S} = 3000$  m/s relativa al observador que se encuentra en la Tierra.

- b) Se emite un haz de luz desde una nave espacial a rapidez  $c$ .



**LA MECÁNICA NEWTONIANA FALLA** al decirnos *incorrectamente* que el haz luminoso se desplaza con una rapidez mayor que  $c$  con respecto al observador en la Tierra... lo cual contradice el segundo postulado de Einstein.

### 3. Transformaciones de Lorentz

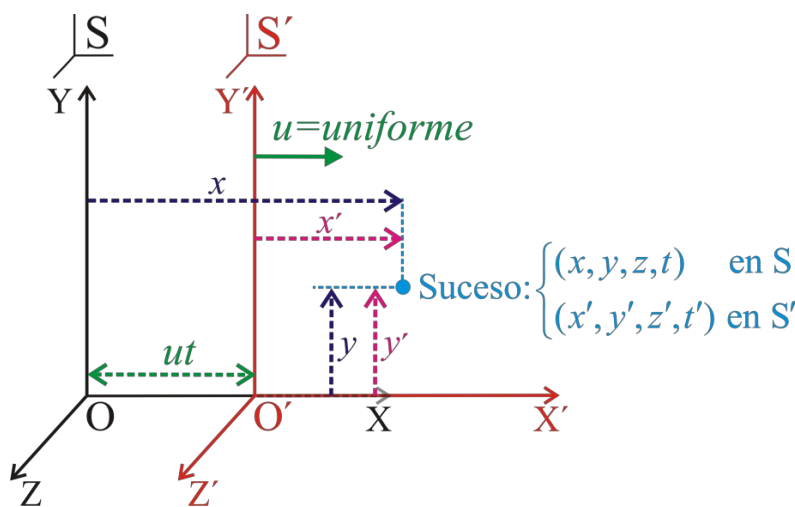
#### 3.1 Transformaciones de Galileo (o clásicas)

En la transformación clásica, se considera que el tiempo y el espacio son absolutos.

Vamos a considerar *dos sistemas de referencia inerciales*:

- **S**: para un observador terrestre (en reposo)
- **S'**: en movimiento uniforme a una velocidad  $u$  en la dirección  $+x$

Vamos a considerar un **Suceso**: *acontecimiento que tiene una posición y tiempo definidos (referidos a un determinado sistema de referencia)*



Cuando los orígenes de ambos sistemas de referencia coinciden, ponernos los cronómetros de S y S' a cero:

$$t=t'=0$$

Consideramos un determinado suceso visto desde ambos sistemas de referencia.

La relación entre las coordenadas de ese suceso, en cada uno de los dos sistemas de referencia viene dado por:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + ut' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Transformación galileana de coordenadas} \\ \text{(Transformación de Galileo)} \end{array}$$

También puedo obtener la transformación inversa (de acuerdo al primer postulado, solo tengo que intercambiar las variables primadas y las no primadas y cambiar de signo la velocidad (+u por -u):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \text{Transformación inversa de Galileo}$$

*¡Estas ecuaciones son consistentes con las observaciones experimentales siempre y cuando  $u$  sea mucho menor que  $c$ !*

→ De estas ecuaciones se deduce la [transformación clásica de velocidades](#):

Si una partícula tiene una velocidad  $v'_x$  en el sistema de referencia  $S'$ , ¿cuál es su velocidad en el sistema de referencia  $S$ ?

Por definición, tenemos que  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ , calculamos ahora la velocidad en el sistema  $S$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{(x' + ut)}_x = \frac{dx'}{dt} + u \stackrel{t=t'}{=} \underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{v'_x} + u = v'_x + u$$

⇓

$$v_x = v'_x + u \text{ (transformación clásica/galileana de velocidades)}$$

Pero si la partícula fuese un fotón  $v'_x = c$ , según la transformación de velocidades obtendríamos que en, el sistema de referencia  $S'$  su velocidad sería  ~~$v_x = c + u$~~  que no es válido porque contradice el segundo postulado de Einstein (la velocidad de ese fotón ha de ser  $c$  en cualquier sistema de referencia).

→ ***La transformación de Galileo no es consistente con los postulados de Einstein de la relatividad especial.***

### 3.2 Transformaciones de Lorentz (o relativistas)

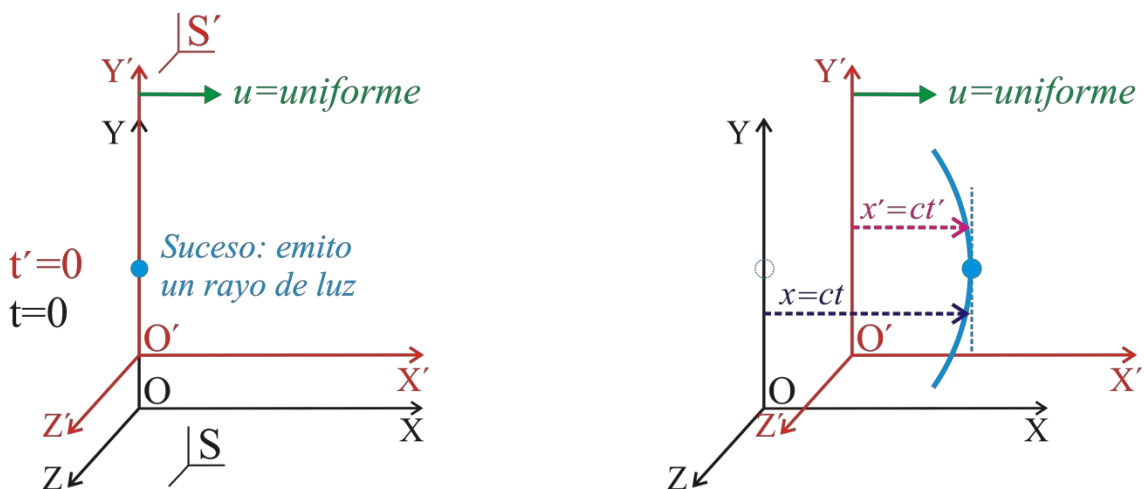
Para deducir la transformación relativista, vamos a suponer que es *la misma que la clásica excepto por la presencia de un multiplicador constante en el segundo miembro*:

$$x = \gamma(x' + ut') \quad \text{donde } \gamma = cte \text{ que puede depender de } u \text{ y } c \quad (1)$$

Mientras que la transformación inversa:

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (2)$$

#### Obtención de $\gamma$ :



Si suponemos que los orígenes son coincidentes en el tiempo, es decir, que se sincronizaron los relojes cuando  $O'$  pasó por delante de  $O$  y se emite un pulso de luz en ese mismo instante, *la componente horizontal del rayo en ambos sistemas es:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Velocidad medida en } S & \text{Tiempo transcurrido en } S & \\ \swarrow & \searrow & \\ x = ct & \text{en } S & \\ \swarrow & \searrow & \\ x' = ct' & \text{en } S' & \\ \swarrow & \searrow & \\ \text{Velocidad medida en } S' & \text{Tiempo transcurrido en } S' & \end{array}$$

Sustituyendo  $x$  y  $x'$  en (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{cases} \text{de (1)} \Rightarrow x = \gamma(x' + ut') \Rightarrow \overbrace{ct}^x = \gamma(ct' + ut') \Rightarrow ct = \gamma t'(c + u) \\ \text{de (2)} \Rightarrow x' = \gamma(x - ut) \Rightarrow \underbrace{ct'}_{x'} = \gamma(ct - ut) \Rightarrow ct' = \gamma t(c - u) \end{cases}$$

Eliminamos  $t$  y  $t'$  en las expresiones anteriores dividiendo el miembro izquierdo de una con el derecho de la otra:

$$\frac{c\cancel{t}}{\cancel{\gamma}(c-u)} = \frac{\cancel{\gamma}\cancel{t}(c+u)}{c\cancel{t}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{(c-u)(c+u)} = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

⇓

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

Nótese que:

- $\gamma \geq 1$
- cuando  $u \ll c$  (velocidades no relativistas)  $\Rightarrow \gamma \approx 1$

**Obtención de la transformación de los tiempos:**

- De (2) despejo la  $x \Rightarrow x = \frac{x'}{\gamma} + ut \Rightarrow x = \gamma \left( \frac{x'}{\gamma^2} + \frac{ut}{\gamma} \right)$

y el valor obtenido lo sustituyo en la expresión (1) para eliminar la  $x$ :

$$\cancel{\gamma}(x' + ut') = \cancel{\gamma} \left( \frac{x'}{\gamma^2} + \frac{ut}{\gamma} \right) \Rightarrow x' - \frac{x'}{\gamma^2} + ut' = \frac{ut}{\gamma} \Rightarrow x' - \frac{x'}{\frac{1-u^2}{c^2}} + ut' = \frac{ut}{\gamma} \Rightarrow x' - \underbrace{x' \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}_{\frac{x'u^2}{c^2}} + ut' = \frac{ut}{\gamma}$$

⇓

$$\frac{x'u^2}{c^2} + \cancel{\gamma}t' = \frac{\cancel{\gamma}t}{\gamma} \Rightarrow \boxed{t = \gamma \left( t' + \frac{ux'}{c^2} \right)} \quad (3)$$

- La transformación que falta se obtiene de una forma análoga: primero despejo la  $x'$  de (1):

$$x' = \frac{x}{\gamma} - ut' \Rightarrow x' = \gamma \left( \frac{x}{\gamma^2} - \frac{ut'}{\gamma} \right)$$

y el valor obtenido lo sustituyo en la expresión (2) para eliminar la  $x'$ :

$$\cancel{\gamma}(x - ut) = \cancel{\gamma} \left( \frac{x}{\gamma^2} - \frac{ut'}{\gamma} \right) \Rightarrow x - \frac{x}{\gamma^2} - ut = -\frac{ut'}{\gamma} \Rightarrow x - \frac{x}{\frac{1-u^2}{c^2}} - ut = -\frac{ut'}{\gamma} \Rightarrow x - \underbrace{x \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}_{\frac{xu^2}{c^2}} - ut = -\frac{ut'}{\gamma}$$

⇓

$$\frac{xu^2}{c^2} - \cancel{\gamma}t = -\frac{\cancel{\gamma}t'}{\gamma} \Rightarrow \boxed{t' = \gamma \left( t - \frac{ux}{c^2} \right)} \quad (4)$$

El resto de las coordenadas, *transversales al movimiento*, no se modifican:  $\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se llaman *transformaciones de Lorentz*. Relacionan las coordenadas  $(x, y, z, t)$  de un suceso visto en el sistema S, con las coordenadas  $(x', y', z', t')$  **del mismo suceso** visto en el sistema S' el cual se está moviendo a lo largo del eje x con una velocidad  $u$  relativa al sistema S.

**En general, considerando que S' se mueve a lo largo del eje x con una velocidad  $u$  relativa al sistema S:**

- Llamamos  $\begin{cases} R(x, y, z, ct) \rightarrow \text{cuadrivector del espacio-tiempo asociado a un suceso E en S} \\ R'(x', y', z', ct') \rightarrow \text{cuadrivector del espacio-tiempo asociado al mismo suceso E en S'} \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}}_R = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}}_L \times \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}}_{R'}, \text{ siendo } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{u}{c}$$

A la matriz  $L$ , se le llama *matriz de cambio de base*. Utilizando la notación matricial, se puede poner como:  $[R] = [L] \times [R']$ , que nos da las transformaciones de Lorentz. En la práctica, puesto que las coordenadas transversales al movimiento no se ven afectadas, se suele poner:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}} \times \boxed{\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{u}{c} \text{ Transformaciones de Lorentz}$$

Para obtener las transformaciones inversas, solo hay que invertir la matriz de cambio de base:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}} \times \boxed{\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}} \text{ Transformaciones inversas de Lorentz}$$

## 4. Consecuencias de las Transformaciones de Lorentz

### 4.1 Relatividad de la simultaneidad (simultaneidad no absoluta)

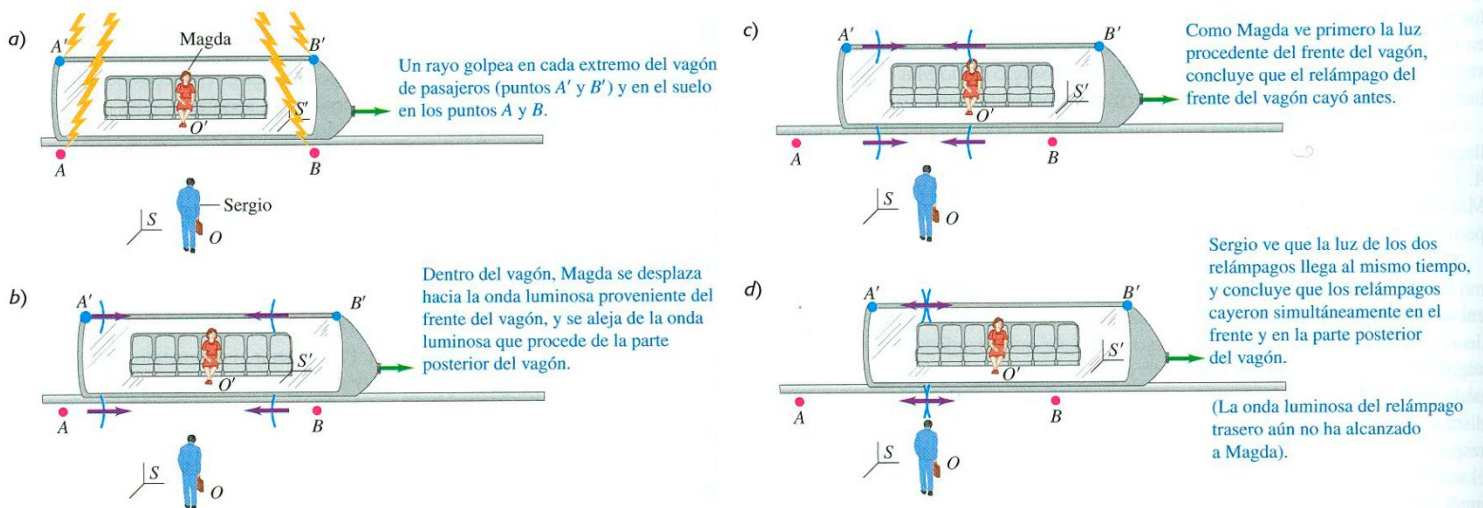
“Hay que tener en cuenta que las afirmaciones en las que se hace el uso del tiempo, son afirmaciones sobre sucesos simultáneos”. A. Einstein

La medición de tiempos e intervalos de tiempo implica el concepto de **simultaneidad**. En un sistema de referencia dado, un **suceso** es un acontecimiento con una posición y tiempo definidos. Cuando decimos que nos despertamos a las siete de la mañana queremos decir que dos sucesos (el despertar y que el reloj marcara las 7:00h) ocurrieron *simultáneamente*.

El problema de medir tiempos es que dos sucesos que son simultáneos en un determinado sistema de referencia, pueden no ser simultáneos en otro sistema de referencia distinto que se mueva respecto al primero, aún cuando ambos sean inerciales.

#### 4.1.1 Experimento mental:

Tenemos un tren (sistema de referencia  $S'$ ) moviéndose a velocidad  $u$  constante (pero comparable a  $c$ ) con respecto a un observador en el andén (sistema de referencia  $S$ ).



Conclusiones:

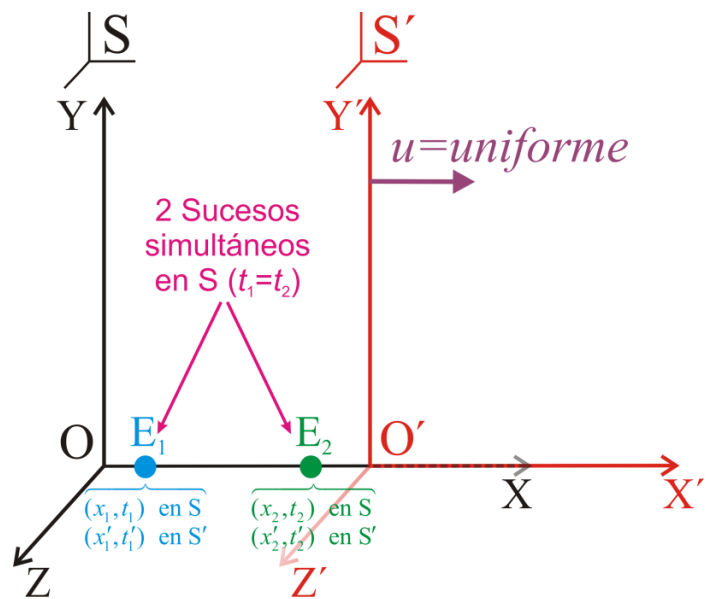
- Da igual cual sea el suceso, porque ambos observadores lo percibirán como una onda propagándose a velocidad  $c$ : no existe ningún sistema de transmisión instantáneo.
- *Si la velocidad de la luz se sumase/restase a la del tren (en contra del segundo postulado de la relatividad) los dos sucesos también serían simultáneos para Magda.*
- Si  $u \ll c$  (o si  $c$  fuese infinita), ambos sucesos serían simultáneos en cualquier sistema de referencia.

4.1.2 Mediante las transformaciones de Lorentz:

- Supongamos que tenemos un sistema de referencia  $S$  en el que tienen lugar dos sucesos físicos  $E_1(x_1, t_1)$  y  $E_2(x_2, t_2)$  que son simultáneos, esto es,  $t_1 = t_2$ .
- En el sistema  $S'$ , los dos sucesos tienen lugar en:  $E_1(x'_1, t'_1)$  y  $E_2(x'_2, t'_2)$
- Vamos a calcular  $t'_1$  y  $t'_2$ :

De las transformaciones inversas de Lorentz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}$$



de donde:  $ct' = -\gamma\beta x + \gamma ct \Rightarrow t' = \gamma \left( t - \frac{ux}{c^2} \right)$

por lo que:

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left( t_1 - \frac{ux_1}{c^2} \right) \\ t'_2 &= \gamma \left( t_2 - \frac{ux_2}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t'_2 - t'_1 = \frac{u}{c^2} \gamma (x_1 - x_2) + \gamma \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\substack{E_1 \text{ y } E_2 \\ \text{simultáneos} \\ \text{en } S}}$$

⇓

$t'_2 - t'_1 = \frac{u}{c^2} \gamma (x_1 - x_2) \neq 0$  En  $S'$  no son simultáneos los sucesos, el suceso  $E_1$  ocurre antes o después de  $E_2$  (depende de si  $x_1$  es mayor o menor que  $x_2$ )

¡Nótese que si  $x_1 = x_2$  los sucesos serían simultáneos en cualquier sistema de referencia!

“En general, la simultaneidad es un concepto relativo, solamente sería absoluta si los dos sucesos simultáneos ocurriesen en el mismo punto”

## 4.2 Relatividad de los intervalos de tiempo (dilatación del tiempo)

### 4.2.1 Experimento mental:

- **Sistema de referencia de Magda (S')**

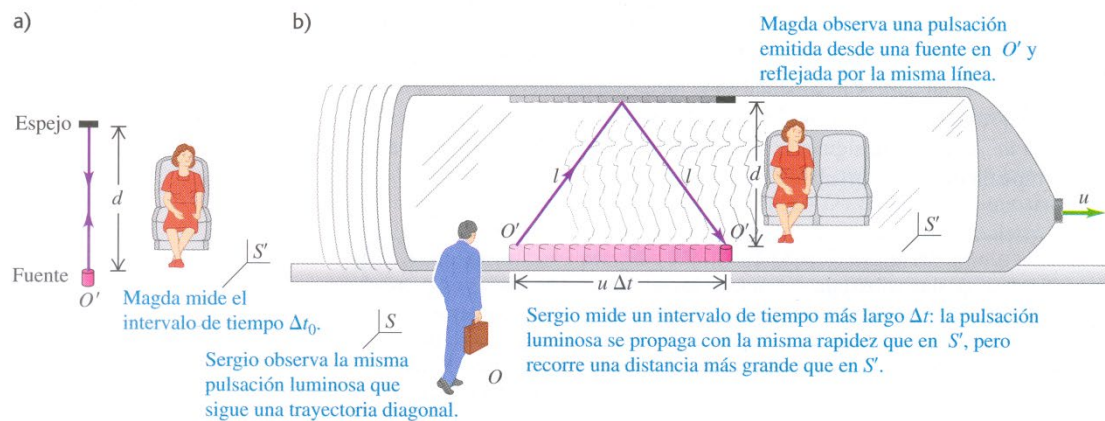
Magda que viaja en el tren (moviéndose a velocidad  $u$  respecto al andén), mide el tiempo entre dos sucesos que ocurren en el mismo punto del espacio:

- Suceso 1: destello de luz que parte de O' ↖ ↗ ¡ mismo punto!
- Suceso 2: destello de luz que regresa a O' tras reflejarse en un espejo situado a una distancia  $d$ .

Al intervalo de tiempo entre dos sucesos, medido en el sistema de referencia  $S'$  (en el cual ocurren en el mismo punto), es el tiempo propio:  $\Delta t_0$

Tiempo propio entre dos sucesos  $\Delta t_0$ : intervalo de tiempo medido entre dos sucesos en aquel sistema de referencia en el que ambos sucesos ocurren en el mismo punto.

**37.6** a) Magda, en el marco de referencia  $S'$ , observa una pulsación luminosa emitida desde una fuente en  $O'$  y reflejada de regreso a lo largo de la misma línea. b) Sergio, en el marco de referencia  $S$ , y Magda ven la misma pulsación luminosa. Se muestran las posiciones de  $O'$  en los momentos de partida y retorno de la pulsación.



Puesto que para Magda (sistema de referencia  $S'$  del tren), desde el suceso 1 al suceso 2, la luz recorre una distancia total  $2d$  (y se mueve a velocidad  $c$ ), por lo que el intervalo de tiempo que mide entre ambos sucesos es:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2d}{c} = \Delta t_0$$

- **Sistema de referencia de Sergio (S)**

¿Cuál sería el tiempo medido por otro observador (Sergio) situado en el andén fuera del tren?

Supongamos que es  $\Delta t = t_2 - t_1$

En el tiempo  $\Delta t$ , el tren (y todo su interior y por tanto el emisor y el receptor) se ha desplazado  $u\Delta t$  de su posición inicial, por lo que *para Sergio, ambos sucesos ya no ocurren en el mismo punto.*

Por Pitágoras, la luz tiene que recorrer una distancia dada por  $2l$ :  $l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$

Puesto que por el segundo postulado de la relatividad, la luz (desde el punto de vista de Sergio) también viaja a velocidad  $c$ , el tiempo que Sergio medirá entre los dos sucesos será:

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}}{c} = \frac{\sqrt{4d^2 + u^2(\Delta t)^2}}{c} = \sqrt{\frac{4d^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}(\Delta t)^2}$$

Pero  $\frac{4d^2}{c^2} = (\Delta t_0)^2$  por lo que:

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_0)^2 + \frac{u^2}{c^2}(\Delta t)^2} \Rightarrow (\Delta t)^2 = (\Delta t_0)^2 + \frac{u^2}{c^2}(\Delta t)^2 \Rightarrow (\Delta t)^2 = \frac{(\Delta t_0)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_0$$

#### 4.2.2 Mediante las transformaciones de Lorentz:

- Sean dos sucesos  $E_1$  y  $E_2$  que en el sistema de referencia  $S'$ , se producen en el mismo lugar  $(x'_1, y'_1, z'_1) = (x'_2, y'_2, z'_2) = (x', y', z')$ , pero en los instantes  $t'_1$  y  $t'_2$ .
- Puesto que ambos sucesos *ocurren en el mismo punto*, el intervalo de tiempo entre esos dos sucesos es, por definición, *la duración propia o el tiempo propio*:  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ .
- **Duración de estos sucesos en el sistema de referencia  $S$**
- ¿Cuánto vale la duración de estos sucesos en el sistema de referencia  $S$ , esto es,  $t_2 - t_1$ ?

De las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix}$$

de donde:  $ct = \gamma\beta x' + \gamma ct' \Rightarrow t = \gamma \left( t' + \frac{ux'}{c^2} \right)$

por lo que:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \gamma \left( t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2} \right) \\ t_2 &= \gamma \left( t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \underbrace{(t'_2 - t'_1)}_{\Delta t_0} + \frac{\gamma u}{c^2} \underbrace{(x'_2 - x'_1)}_{\substack{E_1 \text{ y } E_2 \text{ ocurren} \\ \text{en el mismo} \\ \text{punto en } S'}} = \gamma \Delta t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Puesto que  $\gamma \geq 1 \Rightarrow \Delta t \geq \Delta t_0$  ¡Dilatación del tiempo!

“Si en un sistema de referencia dos sucesos se producen en un mismo lugar, la duración que los separa en dicho sistema de referencia es el tiempo propio; en cualquier otro sistema de referencia la duración es superior a este tiempo”

Consecuencias:

- Los observadores registran que los relojes en movimiento atrasan.
- El transcurso del tiempo es relativo: depende del sistema de referencia en donde se tome.



Experimento de Hafele y Keating (1971). 4 relojes atómicos de cesio en líneas aéreas alrededor del mundo.

• **Separación espacial de estos sucesos en el sistema de referencia S**

- ¿Cuál es la separación espacial de los dos sucesos en el sistema de referencia S?

De las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix}$$

de donde:  $x = \gamma x' + \gamma\beta ct' \Rightarrow x = \gamma(x' + ut')$

por lo que:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \gamma(x'_1 + ut'_1) \\ x_2 = \gamma(x'_2 + ut'_2) \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 - x_1 = \gamma \underbrace{(x'_2 - x'_1)}_{\substack{E_1 \text{ y } E_2 \text{ ocurren} \\ \text{en el mismo} \\ \text{punto en } S'}} + \cancel{\gamma} \underbrace{u(t'_2 - t'_1)}_{(t_2 - t_1)/\gamma} = u(t_2 - t_1)$$

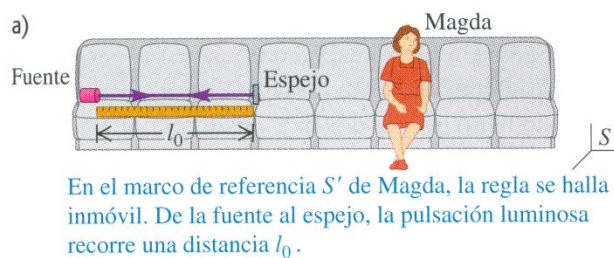
La separación espacial entre los dos sucesos en  $S$  es la distancia que el punto  $x' = x_1 = x_2$  en  $S'$  se mueve durante el intervalo de tiempo que transcurre en  $S$  entre los dos sucesos.

### 4.3 Relatividad de la longitud (contracción de longitudes)

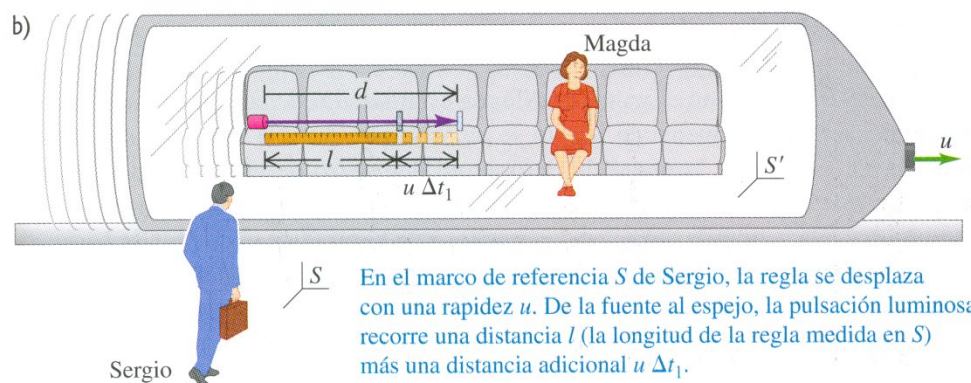
- No solo el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del sistema de referencia del observador: también la distancia entre dos puntos puede depender de él ya que en esta medida está implicado el concepto de simultaneidad.
- Supongamos que queremos medir la longitud de un coche en movimiento. Una forma de hacerlo es con dos asistentes que marquen sobre el pavimento las posiciones de los parachoques frontal y posterior y luego medir la distancia entre esas marcas. El problema es que los dos asistentes deben hacer las marcas *al mismo tiempo* (si uno de ellos marca la posición del parachoques frontal en un momento dado y el otro marca la posición del parachoques posterior medio segundo después no mediremos la longitud verdadera del automóvil): ¡problema de que la simultaneidad no es un concepto absoluto!

#### 4.3.1 Experimento mental:

- Queremos medir la longitud de una regla a bordo del tren y situada paralela a la dirección de movimiento de éste (eje  $x$ ). Para ello fijamos una fuente de luz en un extremo de la regla y un espejo en el otro extremo.
- Tenemos dos sucesos:
  - *Suceso 1*: destello de luz que sale de la fuente.
  - *Suceso 2*: destello de luz que regresa a la fuente tras reflejarse en el espejo.



**37.10** a) Una regla se halla en reposo en el marco  $S'$  de Magda. Una fuente en un extremo de la regla emite una pulsación luminosa que se refleja en un espejo en el otro extremo y regresa a la posición de la fuente. b) Movimiento de la pulsación luminosa medido en el marco  $S$  de Sergio.



- **Sistema de referencia de Magda (S')**

Para Magda, a bordo del tren, la regla está en reposo. La longitud de la regla en dicho sistema de referencia se denomina **longitud propia** y se denota por  $l_0$

*Longitud propia de un objeto  $l_0$ : es la longitud de un objeto medida en aquel sistema de referencia en el cual dicho objeto está en reposo.*

En este sistema de referencia, los dos sucesos ocurren en el mismo punto, por lo que el tiempo entre los dos sucesos es el **tiempo propio  $\Delta t_0$**  :

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \text{ Tiempo requerido por un pulso de luz para el viaje completo fuente-espejo-fuente}$$

- **Sistema de referencia de Sergio (S)**

- En el sistema de referencia  $S$ , la regla se mueve a la derecha a velocidad  $u$ .
- Denotaré por  $l$ , la longitud de la regla en este sistema de referencia.
- Según la sección anterior, el tiempo medido en el sistema de referencia de Sergio ( $\Delta t$ ) está relacionado con el tiempo propio:  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ .
- Vamos a buscar otra forma de calcular este tiempo  $\Delta t$ :

Tiempo trayecto fuente-espejo  $\Delta t_1$ :

- Denotaré por  $\Delta t_1$  el tiempo de viaje del rayo desde la fuente al espejo, medido en  $S$ .
- Durante  $\Delta t_1$ , la regla se mueve una distancia  $u\Delta t_1$ . Por ello, la longitud total de la trayectoria fuente-espejo es:

$$d_1 = l + u\Delta t_1$$

- Puesto que la luz viaja a velocidad  $c$  y tarda un tiempo  $\Delta t_1$  (por definición) en realizar este trayecto:

$$d_1 = c\Delta t_1$$

- Eliminamos  $d$  igualando ambas ecuaciones y calculamos el tiempo en realizar este trayecto:

$$l + u\Delta t_1 = c\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{c - u} \text{ Tiempo para el trayecto fuente-espejo en } S$$

Tiempo trayecto espejo-fuente  $\Delta t_2$ :

- Denotaré por  $\Delta t_2$  el tiempo de viaje del rayo desde la fuente al espejo, medido en  $S$ .
- Durante  $\Delta t_2$ , la regla se mueve una distancia  $u\Delta t_2$ . Por ello, la longitud total de la trayectoria espejo fuente se reduce en este caso:

$$d_2 = l - u\Delta t_2$$

- Puesto que la luz viaja a velocidad  $c$  y tarda un tiempo  $\Delta t_2$  (por definición) en realizar este trayecto:

$$d_2 = c\Delta t_2$$

- Eliminamos  $d$  igualando ambas ecuaciones y calculamos el tiempo en realizar este trayecto:

$$l - u\Delta t_2 = c\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{c+u} \text{ Tiempo para el trayecto espejo-fuente en } S$$

Tiempo total de trayecto fuente-espejo-fuente  $\Delta t$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 &= \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \gamma^2 \frac{2l}{c} \\ \text{Pero por otro lado: } \Delta t &= \gamma \frac{\Delta t_0}{\frac{2l_0}{c}} = \gamma \frac{2l_0}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma^2 \frac{2l}{c} = \gamma \frac{2l_0}{c} \Rightarrow l = \frac{l_0}{\gamma}$$

#### 4.3.2 Mediante las transformaciones de Lorentz:

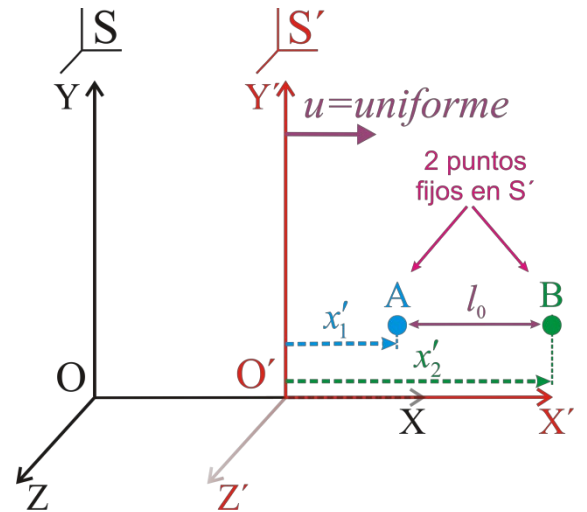
- Sea dos puntos  $A$  y  $B$ , que en el sistema de referencia  $S'$  permanecen fijos. Para simplificar, consideramos que la línea que une los puntos es paralela al eje  $X'$ , por lo que las coordenadas de cada punto son:

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow (x'_1, y', z') \\ B &\rightarrow (x'_2, y', z') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{coordenadas independientes} \\ \text{de } t' \text{ al estar los puntos fijos} \end{array}$$

- Puesto en el sistema de referencia  $S'$  ambos puntos están en reposo, la distancia entre ellos, medida en dicho sistema de referencia es, por definición, la longitud propia:

$$l_0 = x'_2 - x'_1$$

**Distancia entre  $A$  y  $B$  medida en el sistema de referencia  $S$**



- Un observador situado en  $S$ , para medir la distancia de  $A$  a  $B$  tiene que medir en el mismo instante  $t_1=t_2$  las coordenadas de cada punto.
- De las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}$$

de donde:  $x' = \gamma x - \gamma\beta ct \Rightarrow x' = \gamma(x - ut)$

por lo que:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - ut_1) \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - ut_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{x'_2 - x'_1}_{l_0} = \gamma \underbrace{(x_2 - x_1)}_l - \gamma u \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\substack{x_1 \text{ y } x_2 \text{ se miden} \\ \text{simultáneamente} \\ \text{en } S.}}$$

$$\Downarrow$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Puesto que  $\gamma \geq 1 \Rightarrow \Delta l \leq \Delta l_0$  ¡Contracción de longitudes!

“Si en un sistema de referencia, un objeto está fijo, su longitud en dicho sistema de referencia es su longitud propia y, en cualquier otro sistema de referencia, su longitud será inferior a la longitud propia”.

*Conclusión: carece de sentido afirmar “La distancia entre dos puntos del espacio es igual a L”. ¡Esta distancia depende del sistema de referencia elegido!*

¡Las longitudes transversales al movimiento no se ven afectadas!

#### 4.4 Principio de Causalidad

- La relatividad nos exige comprobar si sigue siendo válido el llamado *principio de causalidad*: “todo suceso tiene una causa que le precede”
- Consideremos dos sucesos en un sistema de referencia S:  $E_1(x_1, t_1)$  y  $E_2(x_2, t_2)$  de forma que  $E_2$  es consecuencia de  $E_1$ , esto equivale a que  $t_2 > t_1$ .
- ¿Es posible encontrar algún sistema de referencia S' en el que el efecto sea antes que la causa?

Al deducir la relatividad de la simultaneidad se ha obtenido que:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{u}{c^2} \gamma(x_1 - x_2) + \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \left[ (t_2 - t_1) + \frac{u}{c^2} (x_1 - x_2) \right]$$

Suponemos que la *transmisión causa-efecto ocurre a la máxima velocidad posible*, esto es, a  $c$ :

$$(x_2 - x_1) = c(t_2 - t_1) \Rightarrow (x_1 - x_2) = -c(t_2 - t_1)$$

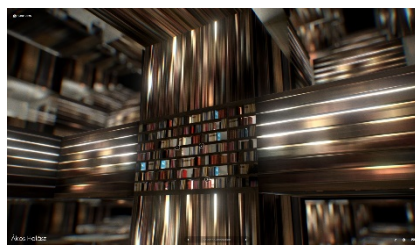
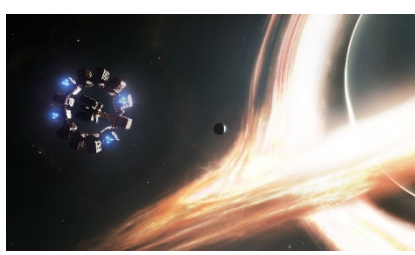
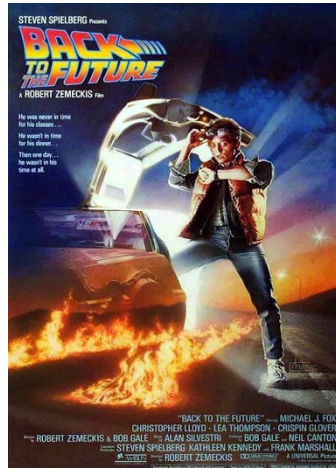
Sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\geq 1} \underbrace{\left[1 - \frac{u}{c}\right]}_{>0 \text{ porque } |u| < c} > 0 \Rightarrow t'_2 > t'_1$$

$>0$  porque en  $S$   $E_2$  es consecuencia de  $E_1$   
 $>0$  porque  $|u| < c$

Es decir, en  $S'$  siempre se detectará primero la causa y luego el efecto. *La relatividad no viola el principio de causalidad.*

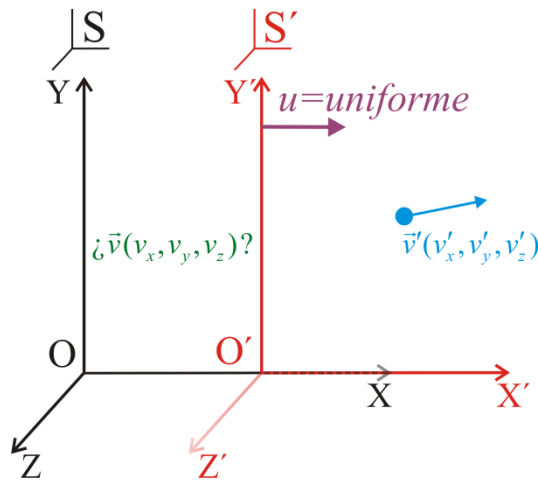
*Corolario: ¡viajar al pasado es imposible!*



## Transformación relativista de la velocidad

Se puede calcular como se transforman las velocidades de un sistema de referencia a otro derivando las ecuaciones de transformación de coordenadas de Lorentz.

- Vamos a suponer una partícula que tiene una velocidad  $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$  en el sistema  $S'$ , el cual se está moviendo hacia la derecha (*dir +x*) a una velocidad  $u$  respecto al sistema de referencia  $S$ .
- ¿Cuánto valdrá la velocidad de la partícula,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ , medida por un observador en  $S$ ?



Las componentes de la velocidad  $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$  en el sistema  $S'$ :

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}; v'_y = \frac{dy'}{dt'}; v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

en el sistema  $S$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

Partimos de las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \Rightarrow x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \Rightarrow t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

Ahora derivamos  $x, y, z$  y  $t$  respecto a  $t'$ :

$$\frac{dx}{dt'} = \gamma \left( \frac{dx'}{dt'} + u \frac{dt'}{dt'} \right) \Rightarrow \frac{dx}{dt'} = \gamma (v'_x + u) \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} \quad (6)$$

$$\frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} \quad (7)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left( \frac{dt'}{dt'} + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \gamma \left( 1 + \frac{u}{c^2} v'_x \right) \quad (8)$$

Dividiendo las expresiones (5), (6) y (7) entre la (8) obtenemos las componentes de las velocidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(5)}{(8)} = \frac{\frac{dx}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\cancel{\gamma} (v'_x + u)}{\cancel{\gamma} \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ \frac{(6)}{(8)} = \frac{\frac{dy}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \\ \frac{(7)}{(8)} = \frac{\frac{dz}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \end{array} \right. \quad \text{Transformación relativista de velocidades}$$

Las transformaciones inversas:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} \quad \text{Transformaciones inversas de velocidades}$$

Estas ecuaciones difieren del resultado clásico e intuitivo, debido a que los denominadores de dichas ecuaciones no son iguales a 1:

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \quad \text{Transformaciones clásicas de velocidades}$$

Sin embargo, si:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \ll c \\ v'_x \ll c \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma \approx 1 \\ \frac{u}{c^2} v_x \ll 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left(1 \pm \frac{u}{c^2} v_x\right) \approx 1 \Rightarrow \text{¡Las expresiones relativistas y clásicas coinciden!}$$

- **Ejemplo:** Una nave espacial que viaja a velocidad  $u$  relativa a la tierra en la dirección  $+x$ , lanza un rayo láser. ¿Qué velocidad tendrá luz del láser para un observador en la tierra?

Tenemos que  $v'_x = c$ , calculamos  $v_x$ :

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2} c} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{\cancel{c} + u}{\frac{\cancel{c} + u}{c}} = c \quad \text{¡Como exige el 2º postulado!}$$

## 5. Dinámica relativista

La dinámica clásica está basada en los principios fundamentales de la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía. Será necesario reformular algunos conceptos en el marco de la relatividad especial.

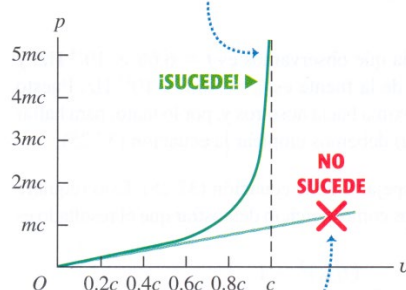
### 6.1 Cantidad de movimiento relativista

- Las leyes de movimiento de Newton tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Cuando usamos transformaciones para pasar de un sistema de referencia a otro, las leyes deben ser *invariantes* (no deben cambiar).
- Sin embargo, el principio de relatividad nos obliga a cambiar la transformación galileana por la de Lorentz, por lo que hay que revisar algunos conceptos.
- El principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que cuando dos cuerpos interactúan en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total es constante.

- Si asumimos que la conservación de la cantidad de movimiento es una ley física válida, ésta debe ser válida en todos los sistemas de referencia inerciales.
- **Problema:** debido a la transformación relativista de velocidades la cantidad de movimiento clásica ( $=mv$ ) no se conserva en todos los sistemas de referencia inerciales.
- **Solución:** si el principio de relatividad y la transformación de Lorentz son correctos, la única forma de “salvar” la conservación de movimiento es *generalizar la definición de cantidad de movimiento*.

**37.20** Gráfica de la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula de masa en reposo  $m$  en función de la rapidez  $v$ . También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos sólo cuando la rapidez es mucho menor que  $c$ .

La cantidad de movimiento relativista se vuelve infinito conforme  $v$  se aproxima a  $c$ .



La mecánica newtoniana predice, incorrectamente, que la cantidad de movimiento tiende a infinito sólo si  $v$  tiende a infinito.

Partícula con:

Cantidad de movimiento relativista:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{masa en reposo: } m \\ - \text{velocidad: } \vec{v} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}}$$

Cuando  $v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow \infty$

Comentarios:

- Hay quien considera  $\gamma m = m_{rel}$  (masa relativista), porque así  $\vec{p} = m_{rel} \vec{v}$ .
  - Sin embargo, es preferible considerar la masa de la partícula como un invariante e independiente de su velocidad, ya que:  $\vec{F} \neq m_{rel} \vec{a}$  y  $K \neq \frac{1}{2} m_{rel} v^2$ .
- **Segunda ley de Newton**
  - Los experimentos han demostrado que la segunda Ley de Newton es válida siempre que usemos la cantidad de movimiento relativista:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ojo, como la cantidad de movimiento no es directamente proporcional a  $v$ ,  $\frac{dp}{dt}$  no es directamente proporcional a la aceleración  $\Rightarrow$  *una fuerza constante no produce una aceleración constante!*

**Caso particular: fuerza y la velocidad están dirigidas a lo largo de la misma línea**

En este caso, la fuerza varía el módulo de la velocidad de la partícula y por tanto queda:

$$F = \frac{m}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} a \quad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea})$$

Por tanto, la aceleración viene dada por:  $a = \frac{F}{m} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}_{1/\gamma^3}$

Consecuencias:

- Aunque mantengamos  $F = \text{cte}$ , a medida que aumenta la velocidad de la partícula, su aceleración va disminuyendo. Es decir, cuanto mayor es la velocidad de la partícula más fuerza es necesaria para mantener la aceleración.
- **¡Cuando  $v \rightarrow c \Rightarrow a \rightarrow 0$  independientemente de lo grande que sea la fuerza!**
- **¡Independientemente de lo grande que sea una fuerza aplicada, o el intervalo en el que se le aplique, el cuerpo no llegará a la velocidad de la luz (ni la rebasará)!  
 $\Rightarrow$  es imposible acelerar una partícula de masa a velocidad mayor o igual que  $c$   
 $\Rightarrow$  la velocidad de la luz es un límite superior para los objetos con masa.**

## 6.2 Energía relativista

- Al igual que en la mecánica clásica, definimos la energía cinética como el *trabajo realizado por una fuerza para acelerar una partícula desde el reposo hasta una cierta velocidad*.
- Considerando una sola dimensión, esto es, tanto la fuerza como la velocidad están dirigidas a lo largo del eje  $x$ :

$$K = \int_{v=0}^v \sum F dx = \int_{v=0}^v \frac{dp}{dt} dx = \int_{v=0}^v dp \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v = \int_{v=0}^v v dp$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} dp &= d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{mdv(1-v^2/c^2)^{1/2} - mv(-v/c^2)(1-v^2/c^2)^{-1/2} dv}{(1-v^2/c^2)} \times \frac{\left(\frac{1-v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1-v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{mdv(1-v^2/c^2) - mdv(v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)} = \frac{mdv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral de la energía cinética:

$$\begin{aligned} K &= \int_{v=0}^v v \frac{mdv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = mc^2 \left( \frac{\overbrace{1}^{\gamma}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\substack{\text{¡Depende de } v! \\ \text{Energía total relativista}}} - \underbrace{mc^2}_{\substack{\text{¡No depende de } v! \\ \text{Energía en reposo } E_0}} \\ &= mc^2 \gamma - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) \end{aligned}$$

- **Energía total relativista:** es la suma de la energía cinética más la energía en reposo.

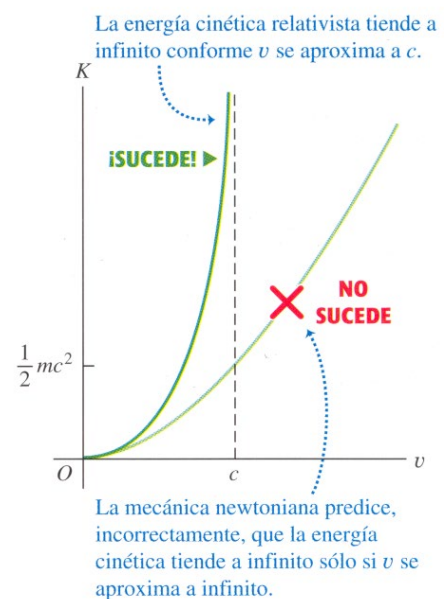
$$E = K + E_0 = (mc^2 \gamma - mc^2) + mc^2 = mc^2 \gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza aumenta la energía total de una partícula desde su valor en reposo ( $= mc^2$ ) hasta su valor final ( $= mc^2 \gamma$ )

Nótese que cuando

$$v \rightarrow c \Rightarrow E \rightarrow \infty \text{ y } K \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  ¡Necesitaríamos aportar una energía infinita!



- Se puede obtener una relación útil para la velocidad de una partícula multiplicando la cantidad de movimiento por  $c^2$ :

$$pc^2 = \frac{\overbrace{mv}^p}{\sqrt{1-v^2/c^2}} c^2 = Ev \Rightarrow \boxed{\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}}$$

- ¿Pero, esta energía cinética  $K = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$  tiene algo que ver con la expresión clásica  $K_{clásica} = \frac{1}{2}mv^2$ ?

Cuando  $v \ll c$ , usando el desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots \quad \text{Si } |x| \ll 1 \Rightarrow (1+x)^n \approx 1 + nx$$

podemos desarrollar de forma aproximada:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = (1-v^2/c^2)^{-1/2} \stackrel{\substack{v^2/c^2 \ll 1 \\ \frac{1}{c^2} \ll 1}}{\approx} 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética relativista:

$$K = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \approx m \cancel{c^2} \left( \cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{\cancel{c^2}} - \cancel{1} \right) = \frac{1}{2}mv^2 = K_{clásica}$$

- A veces, en lugar de la velocidad suele conocerse la cantidad de movimiento o la energía de una partícula. Podemos eliminar la velocidad combinando las expresiones de  $E^2$  y  $p^2$ :

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{1-v^2/c^2}, \quad p^2 = \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2}$$

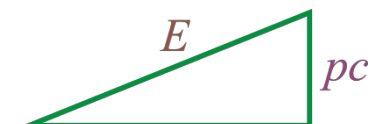
$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^4}{1-v^2/c^2} - \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} c^2 = \frac{m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2}{1-v^2/c^2} = \frac{m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 (\cancel{c^2 - v^2})}{\cancel{c^2 - v^2}}$$

⇓

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

- Esta expresión es válida para calcular la relación entre la energía y el momento de un fotón que tiene masa nula y velocidad igual a  $c$ :

$$E_{fotón} = pc$$



Regla mnemotécnica